e-ISSN: 2549-5070
p-ISSN: 2549-8231

Journal of Medives Volume 2, No. 1, 2018, pp. 41-50
http://e-journal.ikip-veteran.ac.id/index.php/matematika/article/view/526

PENGEMBANGAN TEOREMA MORLEY PADA SEGIEMPAT

Fabelia Andani Barutu*, Mashadi, Sri Gemawati
Program Studi Magister Matematika Universitas Riau
*fabeliaandani.b@gmail.com

Diterima: Nopember 2017. Disetujui: Desember 2017. Dipublikasikan: Januari 2018

ABSTRAK

Pada umumnya teorema Morley diberlakukan pada segitiga, dalam tulisan ini akan dikembangkan ide teorema Morley untuk bangun datar dengan sisi yang lebih banyak (dalam hal ini segi empat) dan menentukan rumus panjang sisi segiempat Morley tersebut. Segiempat yang dibahas yakni persegi, persegi panjang, belah ketupat, layang-layang, dan trapesium sama kaki. Pembuktian dalam tulisan ini menggunakan cara yang lebih sederhana dengan konsep kesebangunan dan konsep trigonometri.

Kata kunci: Teorema Morley, konsep kekongruenan, trigonometri.

ABSTRACT

Morley's Theorem generally applies in triangle. This paper applied Morley's Theorem in quadrilateral to determine the side lenght of Morley's quadrilateral. Quadrilaterals discussed in this paper are square, rectangle rhombus, kite, and isoscelestrapezium. Simpler way is used to prove by applying congruence and trigonometric concepts.

Keywords*: Morley's Theorem, congruence concept, trigonometry.*

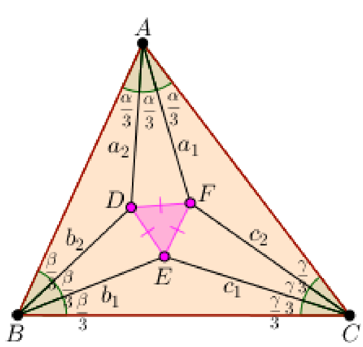
How to Cite: Barutu, F.A., Mashadi., & Gemawati, S. (2018). Pengembangan Teorema Morley pada Segiempat. *Journal of Medives*, *2*(1), 41-50.

PENDAHULUAN

Menurut (Oakley & Baker, 2014) menyatakan bahwa teorema Morley berkaitan dengan tokoh yang bernama Frank Morley (1899), yang merupakan profesor Matematika di Haverford College. Salah satu artikel yang membahas tentang teorema Morley adalah (Peters, 1941) yang menyatakan bahwa Morley menemukan sebuah teorema yang diberi nama "Teorema Morley". Teorema tersebut dinyatakan sebagai berikut.

Teorema Morley

Diberikan sebarang ΔABC. Setiap sudut ΔABC yakni $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$ dibangun trisektor. Trisektor yang berdekatan akan berpotongan di satu titik yakni titik D, E, dan F. Jika titik-titik perpotongan tersebut dihubungkan maka terbentuk ΔDEF sama sisi. Segitiga DEF tersebut disebut dengan segitiga Morley.



Gambar 1. Teorema Morley pada Segitiga Sebarang

Morley menyatakan jika ΔABC adalah sebarang dan terdapat trisektor pada $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$ kemudian trisektor yang berdekatan bertemu di titik D, E, dan F, maka ΔDEF sama sisi (Walls, 2008). Misalkan pada $\angle A$ dibentuk trisektor yang disebut garis a_1 dan a_2, pada $\angle B$ dibentuk trisektor yang disebut garis b_1 dan b_2, dan pada $\angle C$ dibentuk trisektor yang disebut garis c_1 dan c_2, maka perpotongan trisektor yang berdekatan itu ialah garis a_2 dan b_1 yang berpotongan dititik D, garis b_2 dan c_1 yang berpotongan dititik E, dan garis a_1 dan c_2 yang berpotongan dititik F. Sehingga jika titik D, E, dan F dihubungkan, maka akan membentuk ΔDEF sama sisi (Gambar 1).

Beberapa bukti dari Teorema Morley dengan sudut pandang yang berbeda telah ditemukan oleh matematikawan seperti (Donolato, 2013), (Stonebridge, 2009), dan (Coghetto, 2015). Dalam (Donolato, 2013) dinyatakan bahwa panjang sisi segitiga Morley adalah

$$8R\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma),$$

dengan $R = \frac{c}{2\sin\angle C}$, $\alpha = \frac{\angle A}{3}$, $\beta = \frac{\angle B}{3}$, dan $\gamma = \frac{\angle C}{3}$. Setiap segitiga mempunyai sudut luar dan sudut jauh yang masing-masing disebut dengan sudut eksterior dan remote interior (Mashadi, 2015[a]). Selanjutnya (Kuruklis, 2014) dan (McCartin, 2010) memberikan kasus yang berkaitan dengan teorema Morley yang berbunyi bahwa segitiga Morley dapat terbentuk dari trisektor sudut eksternal segitiga sebarang.

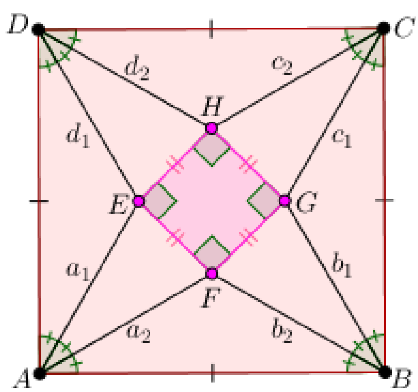
Tulisan ini akan membahas penerapan dan pengembangan teorema Morley pada segiempat yang berlaku untuk persegi, persegi panjang, belah ketupat, layang-layang, dan trapesium sama kaki. Ide pembuktiannya adalah dengan menggunakan konsep kekongruenan dan trigonometri yang dibahas dalam (Mashadi, 2015[b]; Mashadi, 2016) dan materi yang diajarkan di SMP dan SMA.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini adalah hasil dan pembahasan pengembangan teorema Morley pada persegi, persegi panjang, belah ketupat, layang-layang, dan trapesium sama kaki.

Teorema Morley pada Persegi

Terdapat persegi $ABCD$, kemudian dibangun trisektor pada keempat sudutnya, pada setiap sudut akan terdapat dua garis bagi yang membagi sudut menjadi tiga bagian yang sama besar. Garis-garis trisektor tersebut akan berpotongan dengan garis trisektor yang terdekat, sehingga terdapat empat titik perpotongan, jika keempat titik potong tersebut dihubungkan maka terbentuk segiempat $EFGH$ (Gambar 2).



Gambar 2. Teorema Morley pada Segiempat Persegi

Teorema 1

Terdapat segiempat $ABCD$ persegi. Setiap sudut persegi dibentuk trisektor yang membagi setiap sudut menjadi tiga sudut yang sama besar. Misalkan titik E, F, G, dan H adalah titik perpotongan antara garis trisektor a_1 dan d_1, garis trisektor a_2 dan b_2, garis trisektor b_1 dan c_1, dan garis trisektor c_2 dan d_2. Jika keempat titik potong tersebut dihubungkan maka $EFGH$ adalah persegi.

Bukti (Kekongruenan)

Akan dibuktikan bahwa $EFGH$ adalah persegi dengan menunjukkan $EF = FG = GH = EH$ dan besar keempat sudutnya adalah $90°$. Akan ditunjukkan dengan konsep kekongruenan. Pada persegi $ABCD$ jelas bahwa besar $\angle DAB = \angle CBA = 90°$. Sehingga dapat ditunjukkan $\Delta AFB \cong \Delta BGC \cong \Delta CHD \cong \Delta DEA$ yang mengakibatkan $\Delta AEF \cong \Delta BFG \cong \Delta CGH \cong \Delta DHE$ sehingga $EF = FG = GH = EH$.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa keempat sudut pada segiempat $EFGH$ adalah $90°$. Pada ΔAED, terdapat $\angle ADE$ dan $\angle DAE$ yang masing-masing besarnya $30°$. Besar sudut pada segitiga berjumlah $180°$, sehingga

$$\angle AED = 120°. \qquad (1)$$

Pada ΔEDH terdapat $\angle EDH$ yang besarnya $30°$ karena merupakan sudut trisektor pada persegi $ABCD$ dan EDH merupakan segitiga sama kaki, sehingga

$$\angle DEH = \angle DHE = 75°. \qquad (2)$$

Kemudian pada ΔAEF berlaku hal yang sama yakni $\angle EAF = 30°$, sehingga

$$\angle AEF = \angle AFE = 75°. \qquad (3)$$

Besar $\angle FEH$ diperoleh dengan cara mensubtitusikan persamaan (1), (2), dan (3) ke persamaan berikut.

$$\angle FEH = 360° - (\angle AED + \angle DEH + \angle AEF)$$
$$= 360° - (120° + 75° + 75°) = 90°.$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama akan diperoleh $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90°$.

Berdasarkan uraian diatas diperoleh bahwa keempat sudut pada segiempat

$EFGH$ ialah $90°$. Karena keempat sisi pada segiempat $EFGH$ sama panjang dan keempat sudut pada segiempat $EFGH$ $90°$, terbukti bahwa segiempat $EFGH$ adalah persegi yang disebut dengan persegi Morley.

Teorema 2

Panjang sisi persegi Morley adalah $\sqrt{\frac{1}{3}a^2\left(2-\sqrt{3}\right)}$, dengan a merupakan panjang sisi persegi $ABCD$.

Bukti (Aturan Cosinus)

Misalkan panjang sisi $AB = BC = CD = DA = a$ dan $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$. Berdasarkan konsep trisektor pada $\angle A$ dan $\angle B$ maka diperoleh ΔAFB sama kaki dengan besar sudut kakinya $30°$ dan panjang $AF = BF$. Berdasarkan dalil Phytagoras dapat diperoleh $AF = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,AB$. Terdapat empat segitiga sama kaki yakni ΔAEF, ΔBFG, ΔCGH, dan ΔDEH dengan semua panjang kaki-kaki segitiga tersebut ialah

$$AF = BF = BG = CG = CH = DH = DE = AE = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,AB \quad (4)$$

dan $\angle EAF = \angle FBG = \angle GCH = \angle HDE = 30°$.

Dengan menerapkan aturan cosinus pada segitiga sama kaki EAF, diperoleh

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2.AE.AF.cos\angle 30°,$$

$$EF^2 = \frac{1}{3}\left(AD^2 + AB^2 - \sqrt{3}\,AD.AB\right).$$

Oleh karena $AD = AB = a$ maka

$$EF^2 = \frac{1}{3}\left(AB^2 + AB^2 - \sqrt{3}\,AB.AB\right),$$

$$= \frac{1}{3}AB^2(2-\sqrt{3}),$$

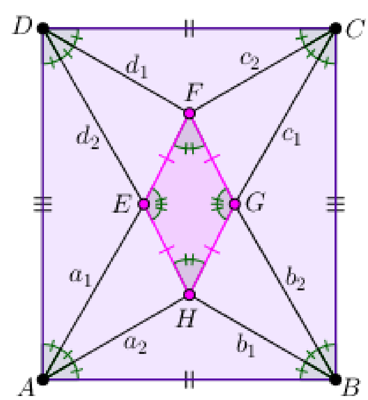
$$EF = \sqrt{\frac{1}{3}a^2\left(2-\sqrt{3}\right)}.$$

Teorema Morley pada Persegi Panjang

Konstruksi Teorema Morley pada persegi panjang sama seperti konstruksi Teorema Morley pada bangun datar yang lainnya (Gambar 3).

Teorema 3

Terdapat segiempat $ABCD$ persegi panjang. Pada setiap sudut persegi panjang dibentuk trisektor yang membagi setiap sudut menjadi tiga sudut yang sama besar. Misalkan titik E, F, G, dan H adalah titik perpotongan antara garis trisektor a_1 dan d_2, garis trisektor d_1 dan c_2, garis trisektor b_2 dan c_1, dan garis trisektor a_2 dan b_1. Jika keempat titik potong tersebut dihubungkan maka membentuk belah ketupat $EFGH$.



Gambar 3. Teorema Morley pada Persegi Panjang

Bukti (Kekongruenan)

Akan dibuktikan bahwa $EFGH$ adalah belah ketupat dengan menunjukkan panjang sisi $EF = FG = GH = EH$, besar $\angle FEH = \angle FGH$, dan $\angle EFG = \angle EHG$. Besar $\angle DAB = \angle CBA = 90°$, maka besar sudut trisektornya ialah $30°$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa $\Delta AED \cong \Delta BGC$ dan $\Delta AHB \cong \Delta CFD$. Dari hasil tersebut dapat ditunjukkan

$\Delta EAH \cong \Delta GBH \cong \Delta GCF \cong \Delta EDF$ yang mengakibatkan $EF = FG = GH = EH$.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\angle FEH = \angle FGH$ dan $\angle EFG = \angle EHG$. Perhatikan ΔABH dan ΔCDF. Diketahui besar $\angle HAB = \angle FCD = \angle HBA = \angle FDC = 30°$, sehingga besar $\angle AHB = \angle CFD$. Perhatikan ΔGBH dan ΔGCF, berdasarkan konsep kekongruen-an sisi-sudut-sisi $\Delta GBH \cong \Delta GCF$ sehingga $\angle BHG = \angle CFG$. Perhatikan ΔEAH dan ΔEDF, berdasarkan konsep kekongruenan sisi-sudut-sisi $\Delta EAH \cong \Delta EDF$ sehingga $\angle AHE = \angle DFE$. Misal-kan besar $\angle AHB = \angle CFD = \alpha$, $\angle BHG = \angle CFG = \beta$, dan $\angle AHE = \angle DFE = \gamma$ sehingga diperoleh

$\angle EFG = \angle CFD + \angle CFG + \angle DFE$,

$$\angle EFG = \alpha + \beta + \gamma, \qquad (5)$$

dan

$\angle EHG = \angle AHB + \angle BHG + \angle AHE$,

$$\angle EHG = \alpha + \beta + \gamma. \qquad (6)$$

Berdasarkan persamaan (5) dan (6) besar $\angle EFG = \angle EHG$. Dengan cara yang sama diperoleh $\angle FEH = \angle FGH$. Karena keempat sisi pada segiempat $EFGH$ sama panjang serta besar $\angle FEH = \angle FGH$ dan $\angle EFG = \angle EHG$ terbukti bahwa segiempat $EFGH$ adalah belah ketupat yang disebut dengan belah ketupat Morley.

Teorema 4

Panjang sisi belah ketupat Morley adalah $\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}\right)}$, dengan a merupakan panjang persegi panjang $ABCD$ dan b merupakan lebar persegi panjang $ABCD$.

Bukti (Aturan Cosinus)

Misalkan panjang sisi $AB = CD = a$ dan $AD = BC = b$. Terdapat empat segitiga sama kaki yakni ΔABH, ΔBCG, ΔCDF dan ΔADE. Panjang sisi yang sama panjang pada ΔABH dan ΔCDF adalah

$$AH = BH = CF = DF = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}a. \qquad (7)$$

Panjang sisi yang sama panjang pada ΔBCG dan ΔADE adalah

$$BG = CG = AE = DE = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}b. \qquad (8)$$

Pada segitiga sebarang AEH besar $\angle EAH = 30°$ dengan menggunakan aturan cosinus dan mensubtitusikan persamaan (7) dan (8) maka diperoleh

$$\begin{aligned} EH^2 &= AE^2 + AH^2 - 2.AE.AH.\cos(30°) \\ &= \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}a\right)^2 - 2\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}b\right)\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}a\right)\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ EH &= \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}\right)}. \end{aligned}$$

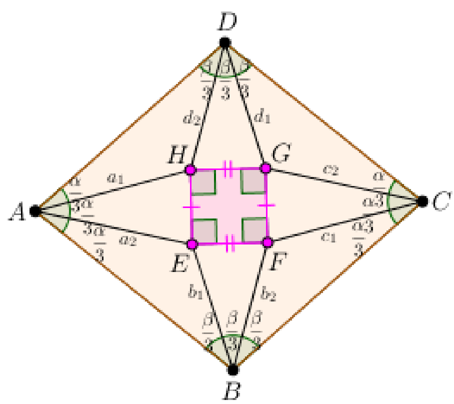
Panjang sisi belah ketupat EFGH adalah $\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}\right)}$.

Teorema Morley pada Belah Ketupat

Teorema Morley pada belah ketupat tentang trisektor yang dibentuk pada setiap sudut belah ketupat $ABCD$ yang saling berpotongan sehingga membentuk persegi panjang $EFGH$ (Gambar 4).

Teorema 5

Terdapat segiempat $ABCD$ belah ketupat. Pada setiap sudut belah ketupat dibentuk trisektor yang membagi setiap sudut menjadi tiga sudut yang sama besar. Misalkan titik *E, F, G,* dan *H* adalah titik perpotongan antara garis trisektor a_2 dan b_1, garis trisektor b_2, dan c_1, garis trisektor c_2 dan d_1, dan garis trisektor a_1 dan d_2. Jika keempat titik potong tersebut dihubungkan maka terbentuk persegi panjang $EFGH$.



Gambar 4. Teorema Morley pada Belah Ketupat

Bukti (Kekongruenan)

Akan dibuktikan bahwa $EFGH$ adalah persegi panjang dengan menunjukkan panjang sisi $EF = GH$, $FG = EH$, dan besar $\angle E = \angle F = \angle G = \angle H = 90°$. Akan ditunjukkan dengan konsep kekongruenan. Besar $\angle ABC = \angle ADC$ dan $\angle BAD = \angle BCD$, sehingga dapat ditunjukkan $\Delta AEB \cong \Delta AHD \cong \Delta CFB \cong \Delta CGD$. Dari hasil itu juga akan mudah ditunjukkan $\Delta EAH \cong \Delta FCG$ dan $\Delta EBF \cong \Delta GDH$ yang mengakibatkan $EF = GH$ dan $FG = EH$.

Selanjutnya akan ditunjukkan besar sudut pada segiempat $EFGH$ adalah $90°$. Besar keempat sudut pada belah ketupat berjumlah $360°$, sehingga

$$2\alpha + 2\beta = 360°$$
$$\alpha + \beta = 180°. \qquad (9)$$

Pada ΔABE diperoleh

$$\angle AEB = 180° - \frac{1}{3}(\alpha + \beta).$$

Subtitusikan persamaan (9) diperoleh

$$\angle AEB = 180° - \frac{1}{3}(180°),$$
$$= 120°. \qquad (10)$$

Karena ΔEBF merupakan segitiga sama kaki maka $\angle BEF = \angle BFE$, sehingga

$$\angle BEF = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{\beta}{3}\right)$$
$$= 90° - \frac{\beta}{6}. \qquad (11)$$

Karena ΔAEH juga merupakan segitiga sama kaki maka $\angle AEH = \angle AHE$, sehingga

$$\angle AEH = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{\alpha}{3}\right)$$
$$= 90° - \frac{\alpha}{6}. \qquad (12)$$

Diketahui besar $\angle FEH$ yaitu

$$\angle FEH = 360° - \angle AEB$$
$$-\angle BEF - \angle AEH. \qquad (13)$$

Subtitusikan persamaan (10), (11), dan (12) persamaan (13), maka diperoleh

$$\angle FEH = 360° - (120°)$$
$$-\left(90° - \frac{\beta}{6}\right) - \left(90° - \frac{\alpha}{6}\right)$$
$$= 360° - 120° - 90° - 90° + \frac{1}{6}(\alpha + \beta).$$

Subtitusikan persamaan (9) sehingga diperoleh

$$\angle FEH = 360° - 120° - 90° - 90° + \frac{1}{6}(180°)$$
$$= 90°.$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90°$.

Karena $EF = GH$, $FG = EH$, dan besar $\angle E = \angle F = \angle G = \angle H = 90°$ terbukti bahwa segiempat $EFGH$ adalah persegi panjang yang disebut dengan persegi panjang Morley.

Teorema 6

Jika $EFGH$ merupakan persegi panjang Morley pada belah ketupat $ABCD$ dengan panjang sisi a, maka $EF =$

$GH = 2a \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ dan $EH = FG = 2a \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)$.

Bukti (Aturan Sinus)

Misalkan panjang sisi $AB = BC = CD = AD = a$. Oleh karena ΔBEF sama kaki, maka diketahui

$$EB = \frac{1}{3}\sqrt{3}EF. \qquad (13)$$

Dengan menggunakan aturan sinus pada ΔABE dan mensubtitusikan persamaan (10) dan (13) maka diperoleh

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{AB}{\sin(\angle AEB)}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}EF}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{a}{\sin 120°}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}EF}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$EF = 2a \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right).$$

Oleh karena $\Delta BEF \cong \Delta DGH$ maka dengan cara yang sama diperoleh juga panjang sisi $GH = 2a \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)$.

Diketahui ΔAEH sama kaki, maka diperoleh

$$AE = \frac{1}{3}\sqrt{3}EH. \qquad (14)$$

Dengan menggunakan aturan sinus pada ΔABE dan mensubtitusikan persamaan (10) dan (14) maka diperoleh

$$\frac{AE}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{AB}{\sin(\angle AEB)}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}EH}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{a}{\sin(120°)}$$

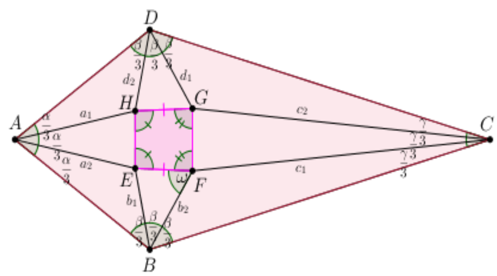
$$\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}EH}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$EH = 2a \sin\left(\frac{\beta}{3}\right).$$

Karena $\Delta AEH \cong \Delta CFG$ maka dengan cara yang sama diperoleh juga panjang sisi $FG = 2a \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)$.

Teorema Morley pada Layang-layang

Teorema Morley pada segiempat layang-layang adalah tentang trisektor yang dibentuk pada setiap sudut layang-layang $ABCD$ akan saling berpotongan dan membentuk trapesium sama kaki $EFGH$ (Gambar 5).



Gambar 5. Teorema Morley pada Layang-layang

Teorema 7

Terdapat segiempat $ABCD$ layang-layang. Pada setiap sudut layang-layang dibentuk trisektor yang membagi setiap sudut menjadi tiga sudut yang sama besar. Misalkan titik E, F, G, dan H adalah titik perpotongan antara garis trisektor a_2 dan b_1, garis trisektor b_2 dan c_1, garis trisektor c_2 dan d_1, dan garis trisektor a_1 dan d_2. Jika keempat titik potong tersebut dihubungkan maka membentuk trapesium sama kaki $EFGH$.

Bukti (Kekongruenan)

Akan dibuktikan $EFGH$ adalah trapesium sama kaki dengan menunjukkan panjang sisi $EF = GH$ dan besar $\angle EFG = \angle FGH$ dengan menggunakan konsep kekongruenan. Diketahui besar $\angle ABC = \angle ADC$, sehingga dapat ditunjukkan $\Delta AEB \cong \Delta AHD$ dan $\Delta CFB \cong \Delta CGD$. Dari hasil itu juga akan mudah ditunjukkan $\Delta EBF \cong \Delta HDG$ yang mengakibatkan $EF = GH$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa besar $\angle EFG = \angle FGH$. Perhatikan ΔBEF dan ΔDHG. Diketahui besar $\angle BFE = \angle DGH$ karena $\Delta BEF \cong \Delta DHG$. Pada ΔBCF dan ΔDCG, diketahui besar $\angle BFC = \angle DGC$ karena $\Delta BCF \cong \Delta DCG$. Kemudian ΔFCG merupakan segitiga sama kaki karena panjang sisi $CF = CG$ sehingga besar sudut pada kaki-kakinya sama besar yakni $\angle CFG = \angle CGF$. Berdasarkan tiga pasang sudut yang sama besar tersebut maka besar $\angle EFG = \angle FGH$. Karena $EF = GH$, dan besar $\angle EFG = \angle FGH$ terbukti bahwa segi-empat $EFGH$ adalah trapesium sama kaki yang disebut dengan trapesium sama kaki Morley.

Teorema 8

Jika $EFGH$ merupakan trapesium sama kaki Morley pada layang-layang $ABCD$ dengan $AB = AD = a$, maka

$$EF = GH = \frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)\sin(\omega)}.$$

Bukti (Aturan Sinus)

Misalkan panjang sisi $AB = AD = a$ dan $BC = CD = b$. Pada ΔABE dengan menggunakan aturan sinus diperoleh

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{AB}{\sin(\angle AEB)}$$

$$EB = \frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(180° - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)}$$

$$= \frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)}. \qquad (15)$$

Perhatikan ΔBEF, dengan menggunakan aturan sinus dan mensubtitusikan persamaan (15) maka diperoleh

$$\frac{EF}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{EB}{\sin(\angle BFE)}$$

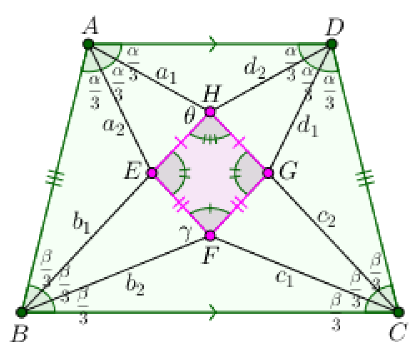
$$\frac{EF}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{\frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)}}{\sin(\omega)}$$

$$EF = \frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)\sin(\omega)}.$$

Oleh karena $\Delta BEF \cong \Delta DGH$, maka dengan cara yang sama diperoleh juga panjang sisi $GH = \frac{a\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)\sin(\omega)}$.

Teorema Morley pada Trapesium Sama Kaki

Teorema Morley pada segiempat trapesium sama kaki menjelaskan tentang trisektor yang dibentuk pada setiap sudut trapesium $ABCD$ akan saling berpotongan dan membentuk segiempat layang-layang $EFGH$ (Gambar 6).



Gambar 6. Teorema Morley pada Trapesium Sama Kaki

Teorema 9

Diketahui segiempat $ABCD$ adalah trapesium sama kaki. Pada setiap sudut trapesium sama kaki dibentuk trisektor yang membagi setiap sudut menjadi sama besar. Misalkan titik E, F, G, dan H

adalah titik perpotongan antara garis trisektor a_2 dan b_1, garis trisektor b_2 dan c_1, garis trisektor c_2 dan d_1, dan garis trisektor a_1 dan d_2. Jika keempat titik potong tersebut dihubungkan maka membentuk layang-layang $EFGH$.

Bukti (Kekongruenan)

Akan dibuktikan $EFGH$ adalah layang-layang dengan menunjukkan panjang sisi $EF = FG$, $EH = GH$ dan besar $\angle FEH = \angle FGH$ dengan menggunakan konsep kekongruenan. Besar $\angle ABC = \angle DCB$ dan $\angle BAD = \angle CDA$, sehingga dapat ditunjukkan $\Delta AEB \cong \Delta DGC$. Dari hasil itu juga dengan mudah dibuktikan $\Delta EBF \cong \Delta GCF$ dan $\Delta EAH \cong \Delta GDH$ yang mengakibatkan $EF = FG$ dan $EH = GH$.

Selanjutnya akan ditunjukkan besar $\angle FEH = \angle FGH$. Berdasarkan konsep kekongruenan, karena $\Delta BEF \cong \Delta CGF$, maka besar $\angle BEF = \angle CGF$. Dimisalkan $\angle BEF = \angle CGF = \gamma$. Karena $\Delta AEB \cong \Delta DGC$, maka besar $\angle AEB = \angle DGC$. Dimisalkan besar $\angle AEB = \angle DGC = \sigma$. Karena $\Delta AEH \cong \Delta DGH$, maka besar $\angle AEH = \angle DGH$. Dimisalkan $\angle AEH = \angle DGH = \theta$. Karena terdapat 3 pasang sudut yang sama besar maka $\angle FEH = \angle FGH$. Karena $EF = FG, EH = GH$, dan besar $\angle FEH = \angle FGH$ terbukti bahwa segiempat $EFGH$ adalah layang-layang yang disebut dengan layang-layang Morley.

Teorema 10

Jika $EFGH$ adalah layang-layang Morley yang diperoleh dari trapesium $ABCD$ dengan $AB = CD = b$, $\frac{\alpha}{3} = \frac{\angle A}{3}$, $\frac{\beta}{3} = \frac{\angle B}{3}$, $\angle BFE = \omega$, dan $\angle AHE = \theta$, maka $EF = FG = \frac{2\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3\sin(\omega)}$ dan $EH = GH = \frac{2\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3\sin(\theta)}$.

Bukti (Aturan Sinus)

Pada pembuktian Teorema 10 ini digunakan konsep trigonometri untuk menunjukkan panjang sisi $EF = GH$. Misalkan panjang sisi $AB = CD = b$. Besar keempat sudut pada trapesium sama kaki berjumlah 360°, sehingga

$$2\alpha + 2\beta = 360°$$

$$\alpha + \beta = 180°. \quad (16)$$

Pada ΔABE dengan menggunakan aturan sinus dan mensubtitusikan persamaan (16) diperoleh

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{AB}{\sin(\angle AEB)}$$

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{b}{\sin\left(180° - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)}$$

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)}$$

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\frac{1}{3}(180°)\right)}$$

$$\frac{EB}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{b}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$EB = \frac{2\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{3}. \quad (17)$$

Perhatikan ΔAEH, dengan menggunakan aturan sinus dan mensubtitusikan persamaan (17) maka diperoleh

$$\frac{EF}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{EB}{\sin(\angle BFE)}$$

$$\frac{EF}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{\frac{2\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{3}}{\sin(\omega)}$$

$$EF = \frac{2\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3\sin(\omega)}.$$

Diketahui $\Delta BEF \cong \Delta CFG$, maka dengan cara yang sama diperoleh juga panjang sisi $FG = \frac{2\sqrt{3}b \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3\sin(\omega)}$.

Pada ΔABE dengan menggunakan aturan sinus diperoleh

$$\frac{AE}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} = \frac{AB}{\sin(\angle AEB)}.$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$AE = \frac{2\sqrt{3}b \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3}. \qquad (18)$$

Perhatikan ΔBEF, dengan menggunakan aturan sinus dan mensubtitusikan persamaan (18) maka diperoleh

$$\frac{EH}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{AE}{\sin(\angle BFE)}$$

$$\frac{EH}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{\frac{2\sqrt{3}b \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3}}{\sin(\theta)}$$

$$EH = \frac{2\sqrt{3}b \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3\sin(\theta)}.$$

Diketahui $\Delta AEH \cong \Delta DGH$, maka dengan cara yang sama diperoleh juga panjang sisi $GH = \frac{2\sqrt{3}b \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{3\sin(\theta)}$.

PENUTUP

Dari Teorema Morley pada segiempat khusus terbentuk segiempat Morley yang khusus juga yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Segiempat Morley yang terbentuk

Segiempat *ABCD*	**Segiempat Morley *EFGH***
Persegi	Persegi
Persegi Panjang	Belah Ketupat
Belah Ketupat	Persegi Panjang
Layang-Layang	Trapesium Sama Kaki
Trapseium Sama Kaki	Layang-Layang

Teorema Morley pada segiempat khusus ini dapat diterapkan ke pembelajaran siswa SMP dan SMA karena pembuktian menggunakan cara yang simpel dan mudah karena pembuktiannya menggunakan prinsip kekongruenan dan trigonometri yang telah diajarkan di sekolah menengah.

DAFTAR PUSTAKA

Coghetto, R. (2015). Morley's trisector theorem. *Formalized Mathematics*. 23 (2), 75-79.

Donolato, C. (2013). A vector based proof of Morley's trisector theorem. *Forum Geometricorum*. 13, 233-235.

Kuruklis, S. A. (2014). Trisectors like Bisectors with equilaterals instead of Points. *Cubo A Mathematical Journal*. 16 (2), 71-110.

Mashadi. (2015)[a]. *Geometri Edisi Kedua*. UR Press. Pekanbaru.

Mashadi. (2015)[b]. *Geometri Lanjut*. UR Press. Pekanbaru.

Mashadi. (2016). *Pengajaran Matematika*. UR Press. Pekanbaru.

McCartin, B. J. (2010). *Mysteries of The Equilateral Triangle*. Hikari Ltd: Michigan.

Oakley, C. O. & Baker, J. C. 2014. The Morley Trisector Theorem. *Mathematical Association of America*. 85 (9), 737-745.

Peters, J. W. (1941). The Theorem of Morley. *National Mathematics Magazine*. 16 (3), 119-126.

Stonebridge, B. (2009). A simple geometric proof of Morley's trisector theorem. *Applied Probability Trust*. 2-4.

Walls, N. (2008). An Elementary Proof of Morley's Trisector Theorem. *Edinburgh Mathematical Notes*. 34, 12-13.